Politechnika Warszawska | Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa | Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

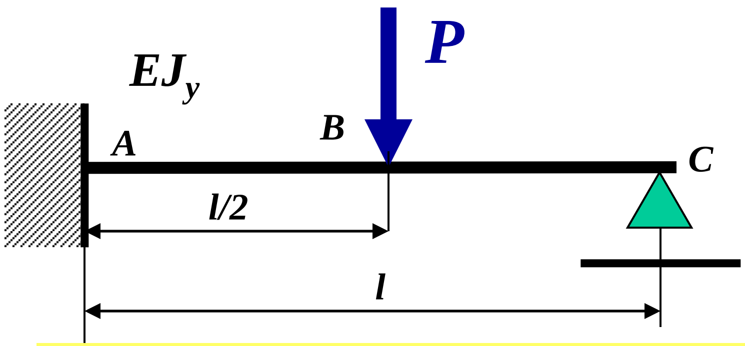
Wykład 5

Konstrukcje prętowe statycznie niewyznaczalne

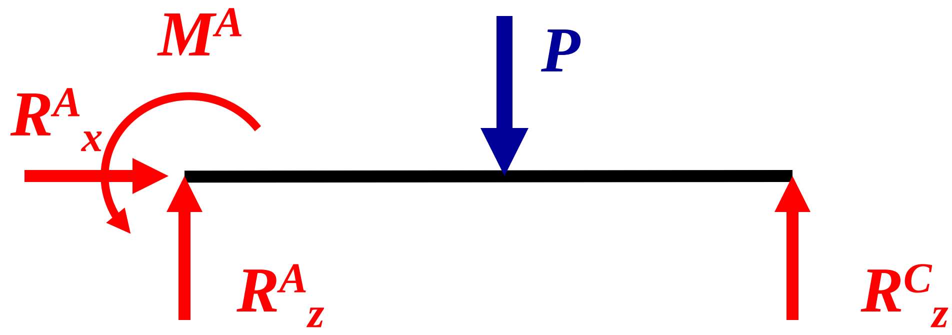
Metoda sił Maxwella-Mohra

Metoda sił Maxwella-Mohra

Przykład: Belka statycznie niewyznaczalna



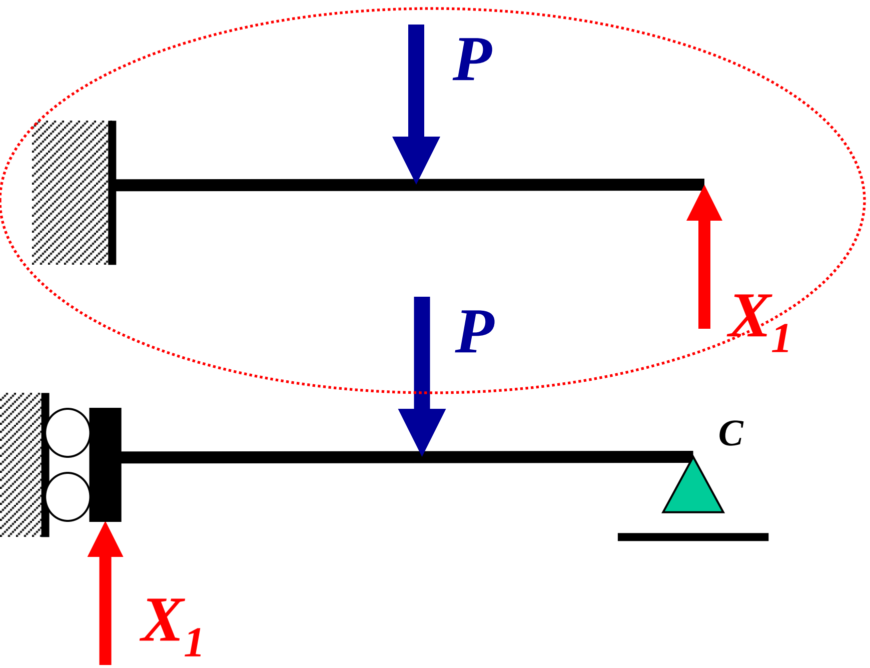
Uwolnienie od więzów

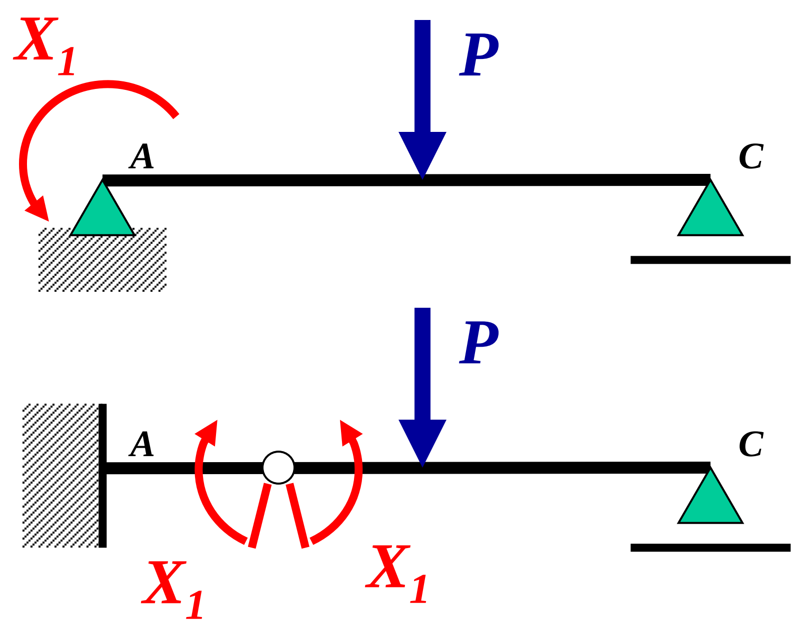


Zadanie statycznie niewyznaczalne: **4** reakcje – **3** równania = **1 kr. stat. niewyznaczalne**

Trzeba uwolnić jeden stopień swobody!

MOŻLIWE ZASTĘPCZE USTROJE RÓWNOWAŻNE STATYCZNIE WYZNACZALNE:

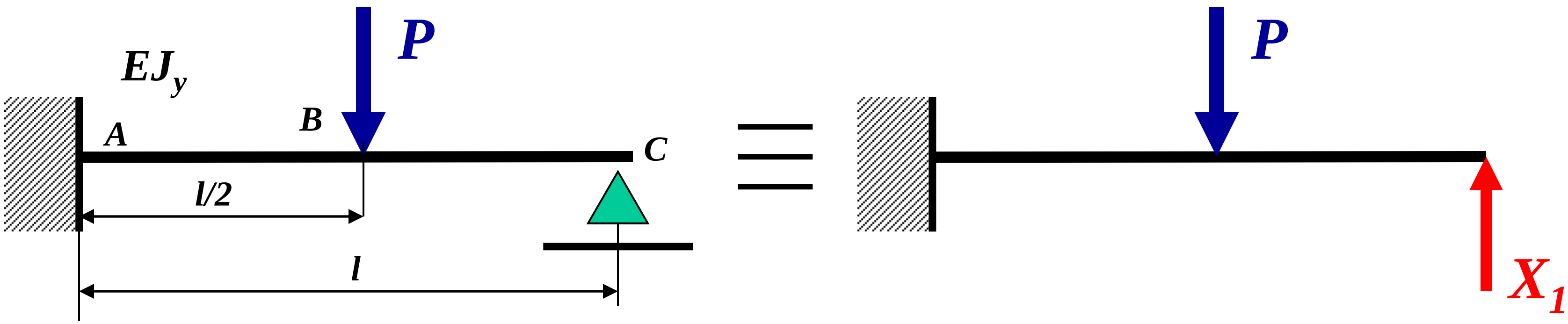




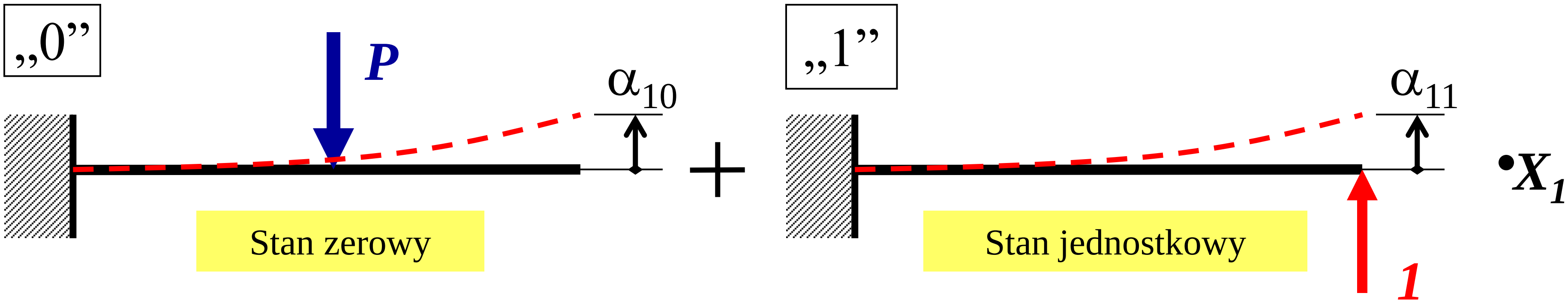
Metoda sił Maxwella-Mohra

Belka 1 krotnie statycznie niewyznaczalna

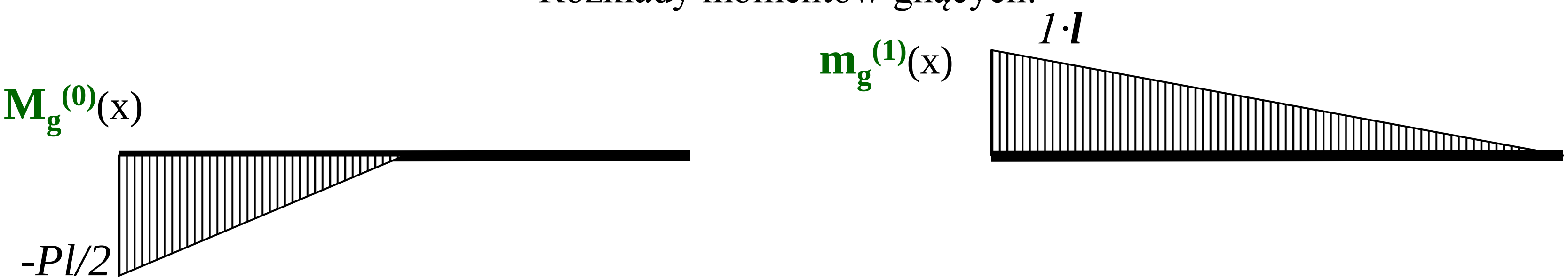
RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



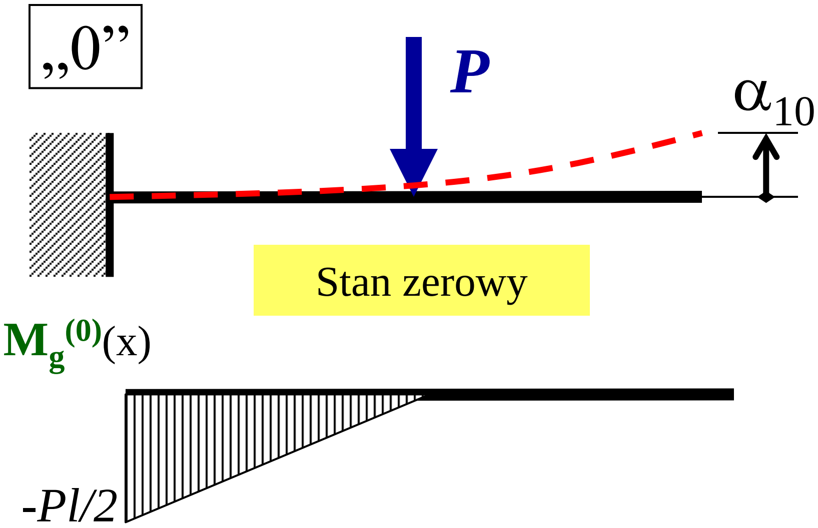
SUPERPOZYCJA DWÓCH STANÓW OBCIĄŻENIA:

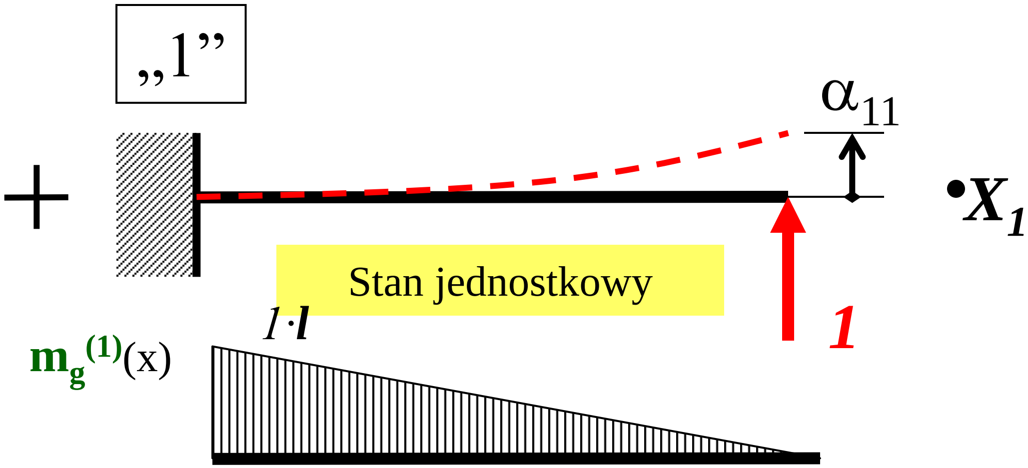


Rozkłady momentów gnących:



Metoda sił Maxwella-Mohra





Ugięcie końca belki w stanie „0”➔ $\alpha_{10} \cong \int_l \frac{m_g^{(1)} \cdot M_g^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds$

t.W. $= \frac{1}{EJ_y} \frac{-\frac{1}{2}Pl \cdot \frac{1}{2}l}{2} \cdot \frac{5}{6}l = \boxed{-\frac{5Pl^3}{48EJ_y}}$

Ugięcie końca belki w stanie „1”➔ $\alpha_{11} \cong \int_l \frac{m_g^{(1)} \cdot m_g^{(1)}}{EJ_y} \cdot ds$

t.W. $= \frac{1}{EJ_y} \frac{l \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3}l = \frac{l^3}{3EJ_y}$

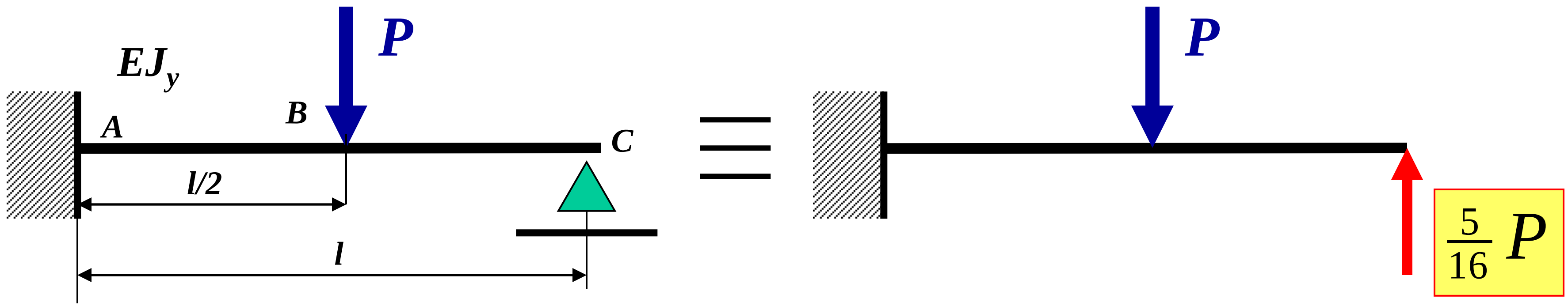
Warunek zerowego przemieszczenia na podporze:

$$\boxed{\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = 0} \Rightarrow X_1 = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = -\frac{-\frac{5Pl^3}{48EJ_y}}{\frac{l^3}{3EJ_y}} \boxed{= \frac{5}{16}P}$$

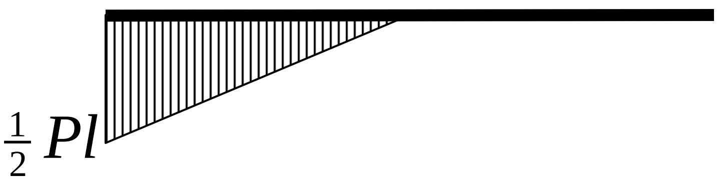
Równanie kanoniczne metody sił Maxwella-Mohra

Metoda sił Maxwella-Mohra

RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY

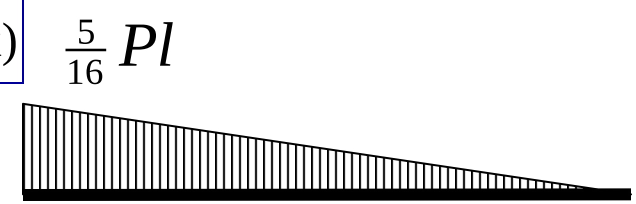


$M_g^{(0)}(x)$



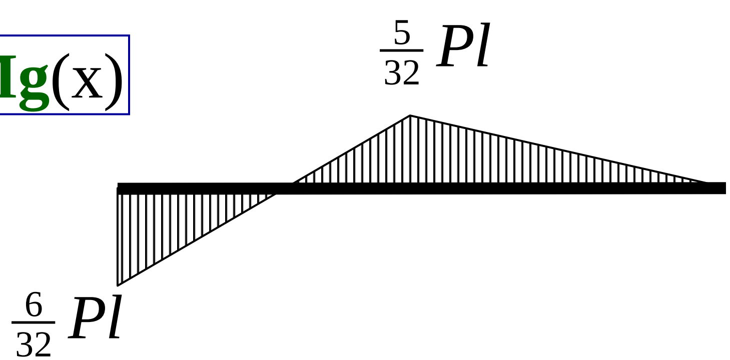
$+$

$\frac{5}{16} P \cdot m_g^{(1)}(x)$



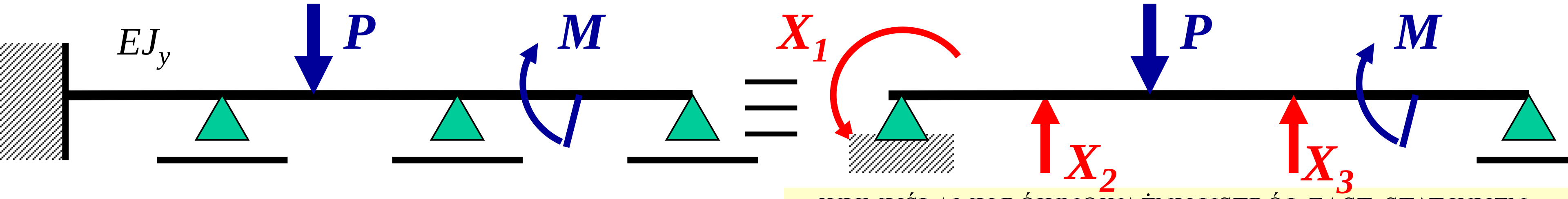
Końcowy rozkład momentu gnącego:

$Mg(x)$



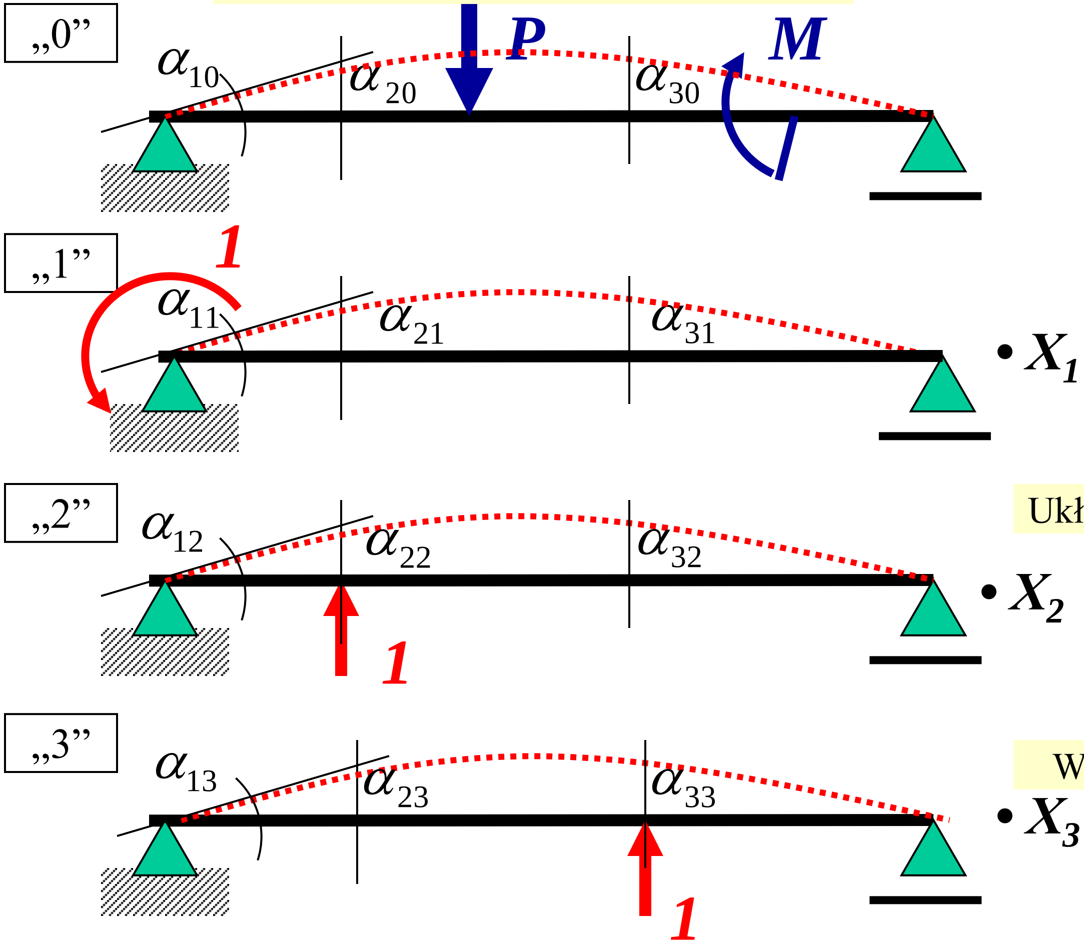
Uogólnienie metody sił Maxwella-Mohra

Konstrukcja statycznie niewyznaczalna ⇒ **6** reakcji – **3** równania = **3 krotnie stat. niewyznaczalna**



WYMYŚLAMY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZAST. STAT.WYZN.

SUPERPOZYCJA STANÓW:



Warunki zerowych przemieszczeń dla uwolnionych stopni swobody:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 + \alpha_{12} \cdot X_2 + \alpha_{13} \cdot X_3 = 0$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot X_1 + \alpha_{22} \cdot X_2 + \alpha_{23} \cdot X_3 = 0$$

$$\alpha_{30} + \alpha_{31} \cdot X_1 + \alpha_{32} \cdot X_2 + \alpha_{33} \cdot X_3 = 0$$

Układ równań kanonicznych metody sił Maxwella-Mohra

$$\alpha_{ij} \cong \int_l \frac{m^{(i)} \cdot m^{(j)}}{EJ_y} \cdot ds$$

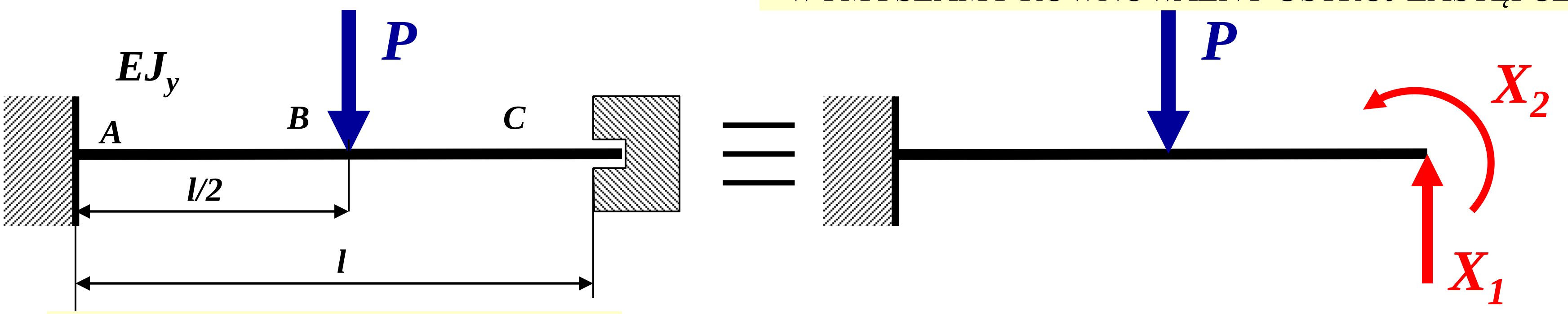
Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

Metoda sił Maxwella-Mohra

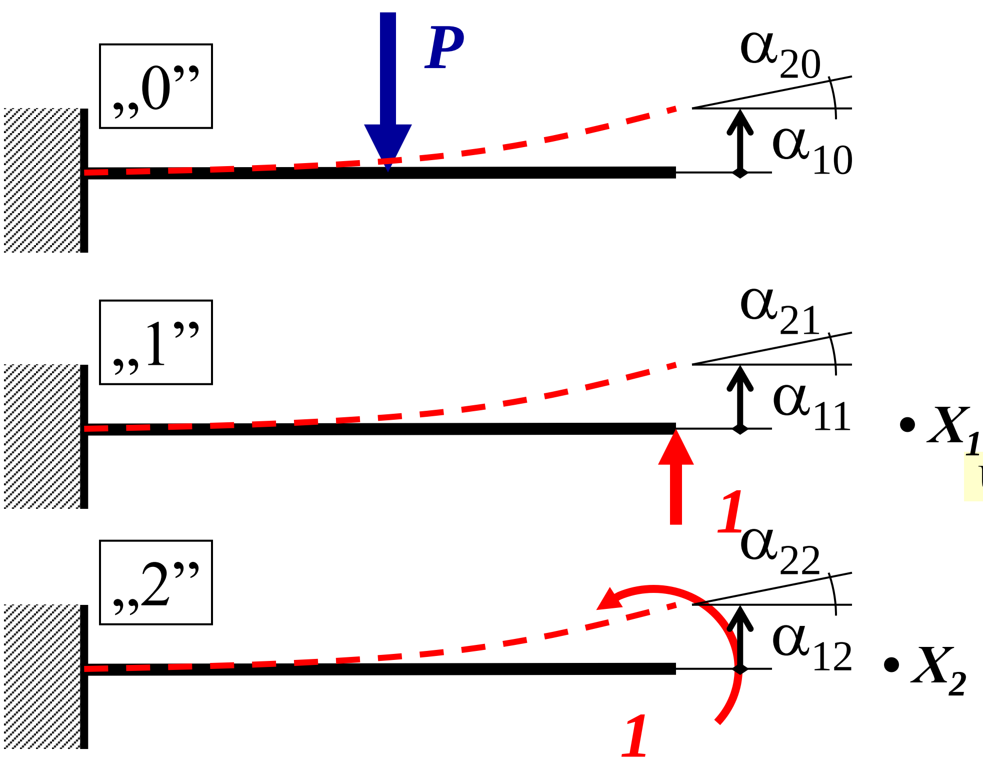
Zad.1. Belka 2 kr.stat. niewyznaczalna

5 reakcji – **3** równania = **3 kr. stat. niewyzn.**

WYMYŚLAMY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



SUPERPOZYCJA STANÓW:



Warunki zerowych przemieszczeń dla uwolnionych stopni swobody:

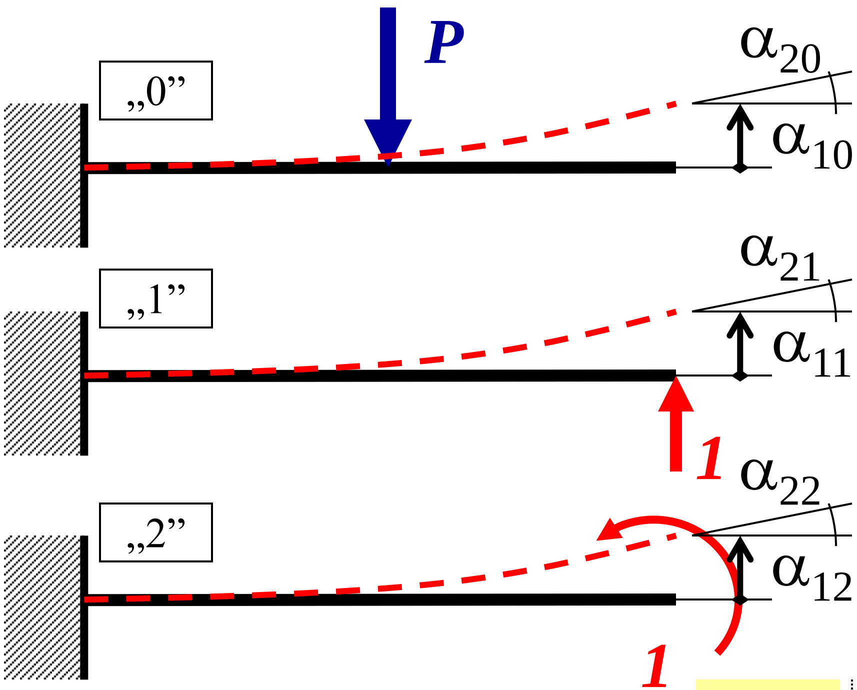
$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 + \alpha_{12} \cdot X_2 = 0$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot X_1 + \alpha_{22} \cdot X_2 = 0$$

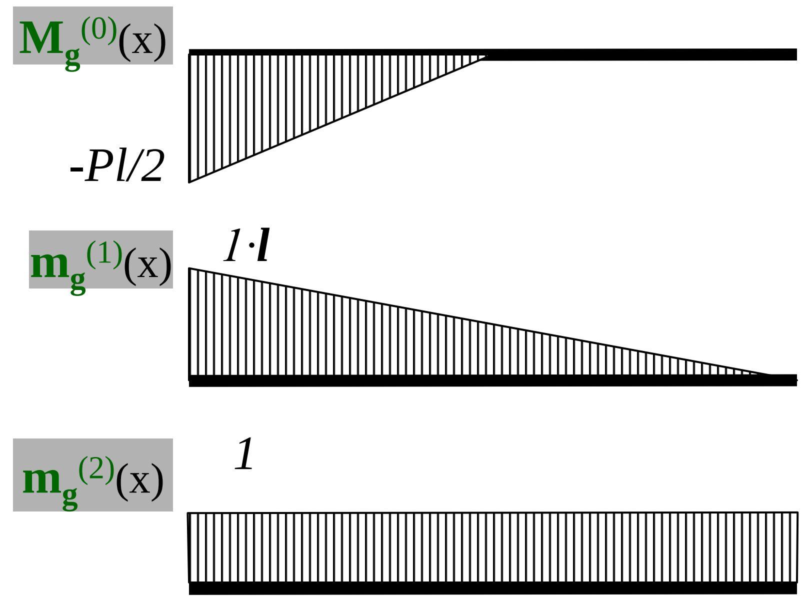
Układ równań kanonicznych metody sił Maxwella-Mohra

Metoda sił Maxwella-Mohra

SUPERPOZYCJA STANÓW:



Rozkłady momentów gnących:



$$\alpha_{11} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(1)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y}\,\frac{1}{2}\,l^2 \cdot \frac{2}{3}\,l = \frac{l^3}{3EJ_y}$$

$$\alpha_{12} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y}\,\frac{1}{2}\,l^2 \cdot 1 = \frac{l^2}{2EJ_y}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}$$

$$\alpha_{22} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} 1 \cdot l \cdot 1 = \frac{l}{EJ_y}$$

$$\alpha_{10} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y}\,\frac{1}{2}\left(\frac{-Pl}{2}\right)\frac{l}{2} \cdot \frac{5}{6}\,l = \frac{-5Pl^3}{48EJ_y}$$

$$\alpha_{20} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot m^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y}\,\frac{1}{2}\left(\frac{-Pl}{2}\right)\frac{l}{2} \cdot 1 = \frac{-Pl^2}{8EJ_y}$$

Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

Metoda sił Maxwella-Mohra

Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M:

$$\alpha_{11} = \frac{l^3}{3EJ_y} \qquad \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{l^2}{2EJ_y} \qquad \alpha_{22} = \frac{l}{EJ_y} \qquad \alpha_{10} = \frac{-5Pl^3}{48EJ_y} \qquad \alpha_{20} = \frac{-Pl^2}{8EJ_y}$$

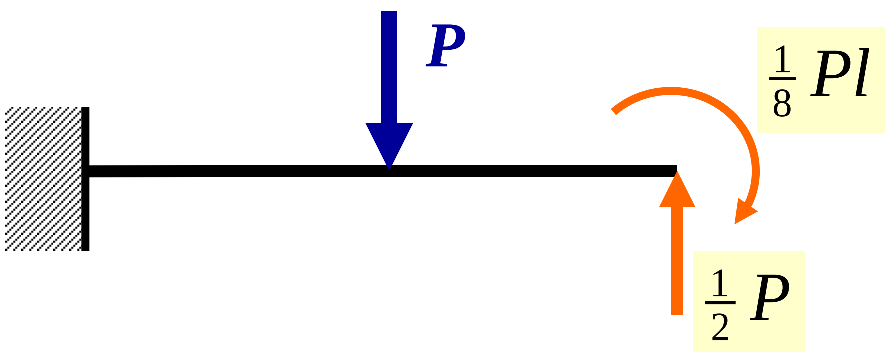
Układ równań kanonicznych metody sił Maxwella-Mohra

$$\frac{-5Pl^3}{48EJ_y} + \frac{l^3}{3EJ_y} \cdot X_1 + \frac{l^2}{2EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

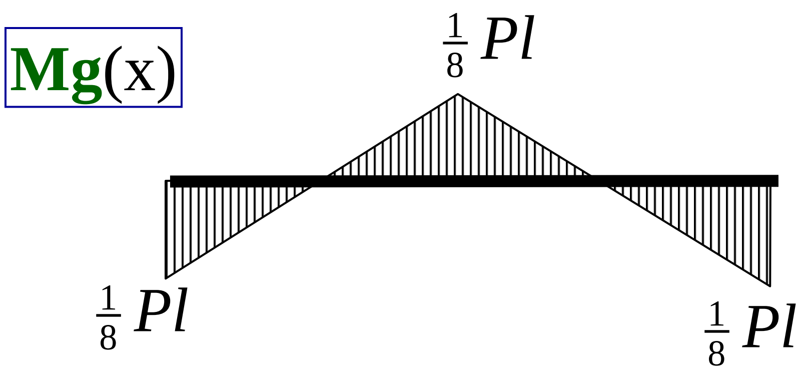
$$\frac{-Pl^2}{8EJ_y} + \frac{l^2}{2EJ_y} \cdot X_1 + \frac{l}{EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad X_1 = \tfrac{1}{2} P \qquad X_2 = -\tfrac{1}{8} Pl$$

RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY:



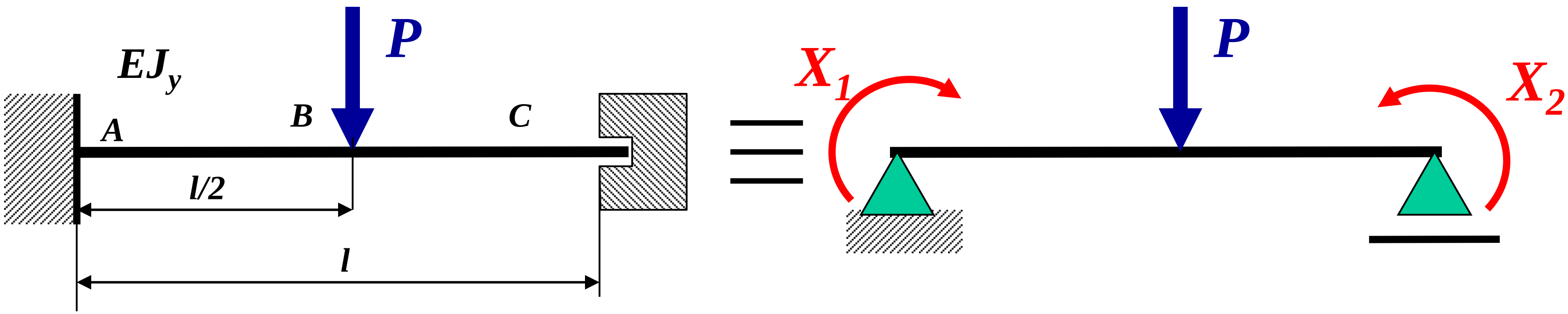
Końcowy rozkład momentu gnącego:



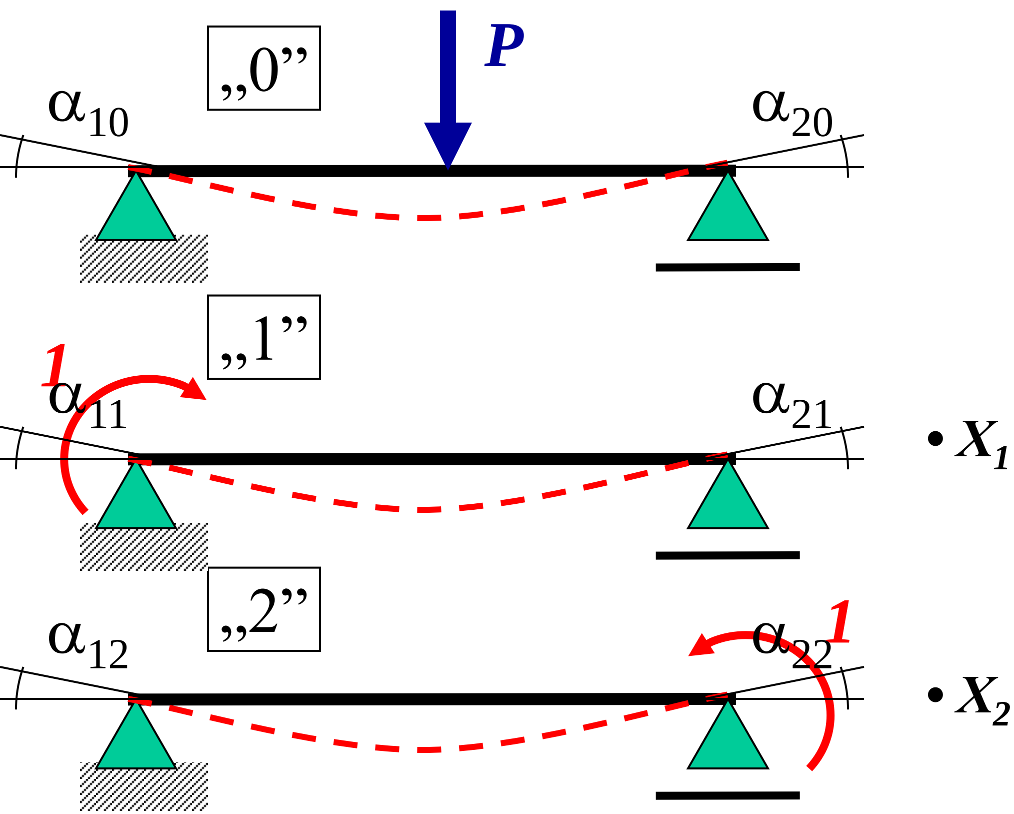
Metoda sił Maxwella-Mohra

Zad.2. Belka 2 kr.stat. niewyznaczalna

WYMYŚLAMY INNY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY



SUPERPOZYCJA STANÓW:



Warunki zerowych przemieszczeń
dla uwolnionych stopni swobody:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 + \alpha_{12} \cdot X_2 = 0$$

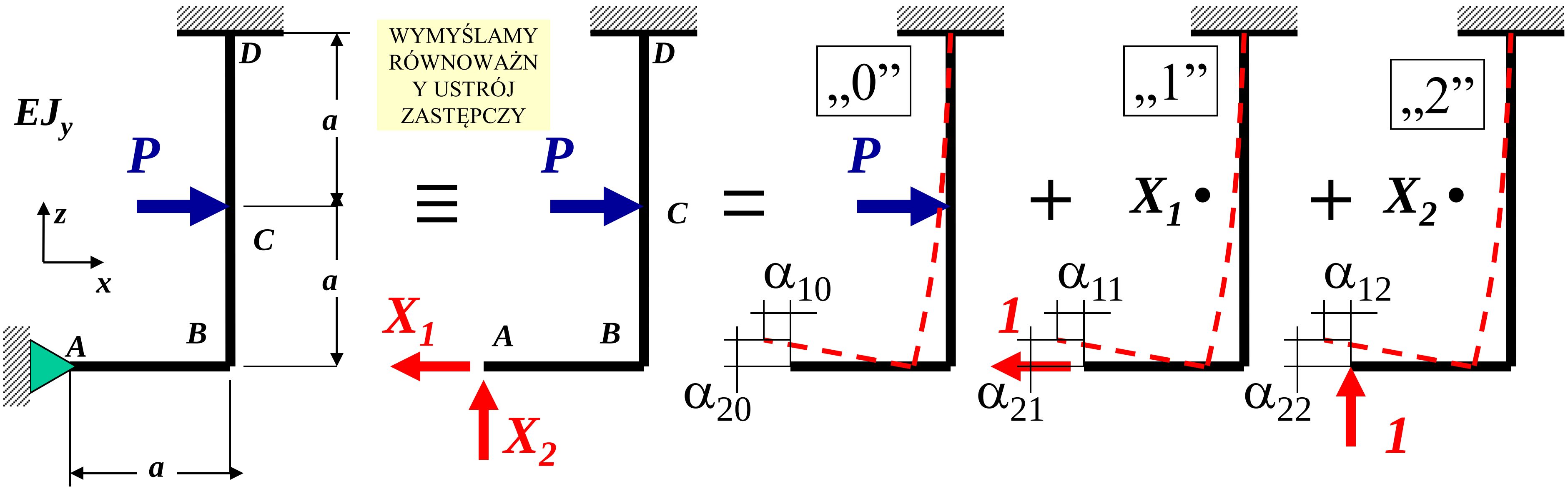
$$\alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot X_1 + \alpha_{22} \cdot X_2 = 0$$

Układ równań kanonicznych metody sił Maxwella-Mohra

Metoda sił Maxwella-Mohra

Zad.3a. Rama 2 kr.stat. niew.

SUPERPOZYCJA STANÓW:

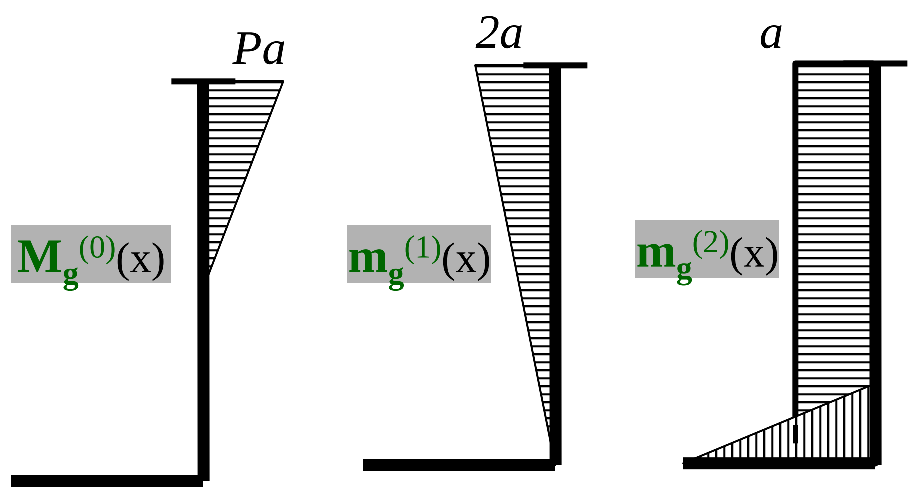


Warunki zerowych przemieszczeń dla uwolnionych stopni swobody:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 + \alpha_{12} \cdot X_2 = 0$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{21} \cdot X_1 + \alpha_{22} \cdot X_2 = 0$$

Układ równań kanonicznych metody sił M-M



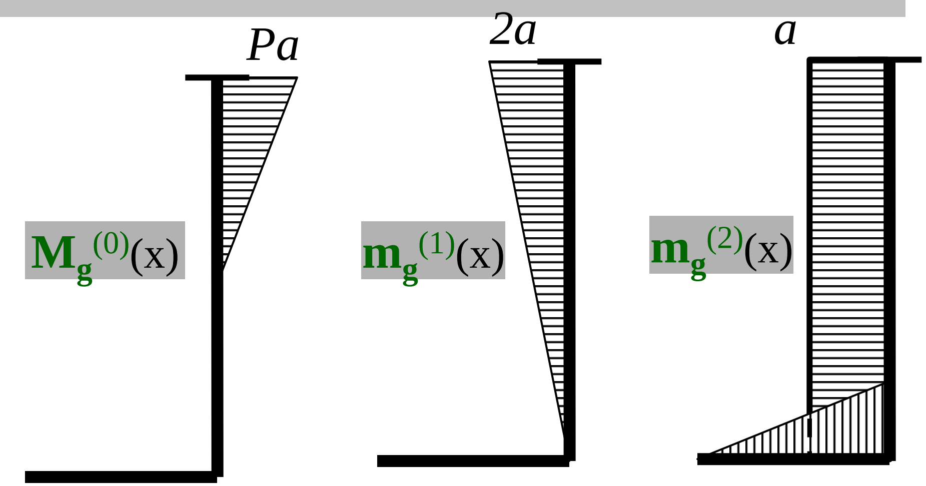
Metoda sił Maxwella-Mohra

Współczynniki równań kanonicznych metody sił M-M

$$\alpha_{11} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(1)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \frac{1}{2} (2a)^2 \cdot \frac{2}{3} 2a = \frac{8a^3}{3EJ_y}$$

$$\alpha_{12} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \frac{1}{2} (2a)^2 \cdot a = \frac{2a^3}{EJ_y}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21}$$



$$\alpha_{22} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot m^{(2)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left(\frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a + 2a^2 \cdot a \right) = \frac{7a^3}{3EJ_y}$$

$$\alpha_{10} \cong \int_l \frac{m^{(1)} \cdot m^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left(-\frac{1}{2} Pa^2 \right) \cdot \frac{5}{6} 2a = \frac{-5Pa^3}{6EJ_y}$$

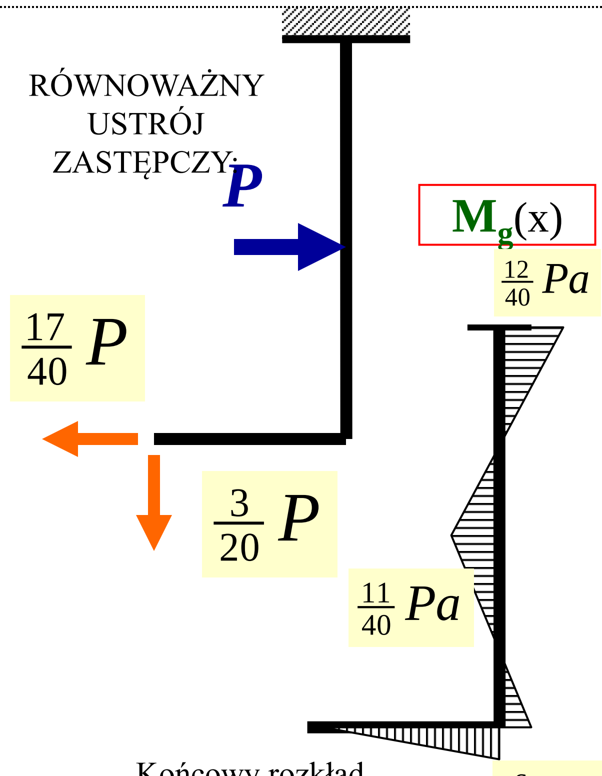
$$\alpha_{20} \cong \int_l \frac{m^{(2)} \cdot m^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \left(-\frac{1}{2} Pa^2 \right) \cdot a = \frac{-Pa^3}{2EJ_y}$$

$$\frac{-5Pa^3}{6EJ_y} + \frac{8a^3}{3EJ_y} \cdot X_1 + \frac{2a^3}{EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

$$\frac{-Pa^3}{2EJ_y} + \frac{2a^3}{EJ_y} \cdot X_1 + \frac{7a^3}{3EJ_y} \cdot X_2 = 0$$

$$X_1 = \frac{17}{40} P$$

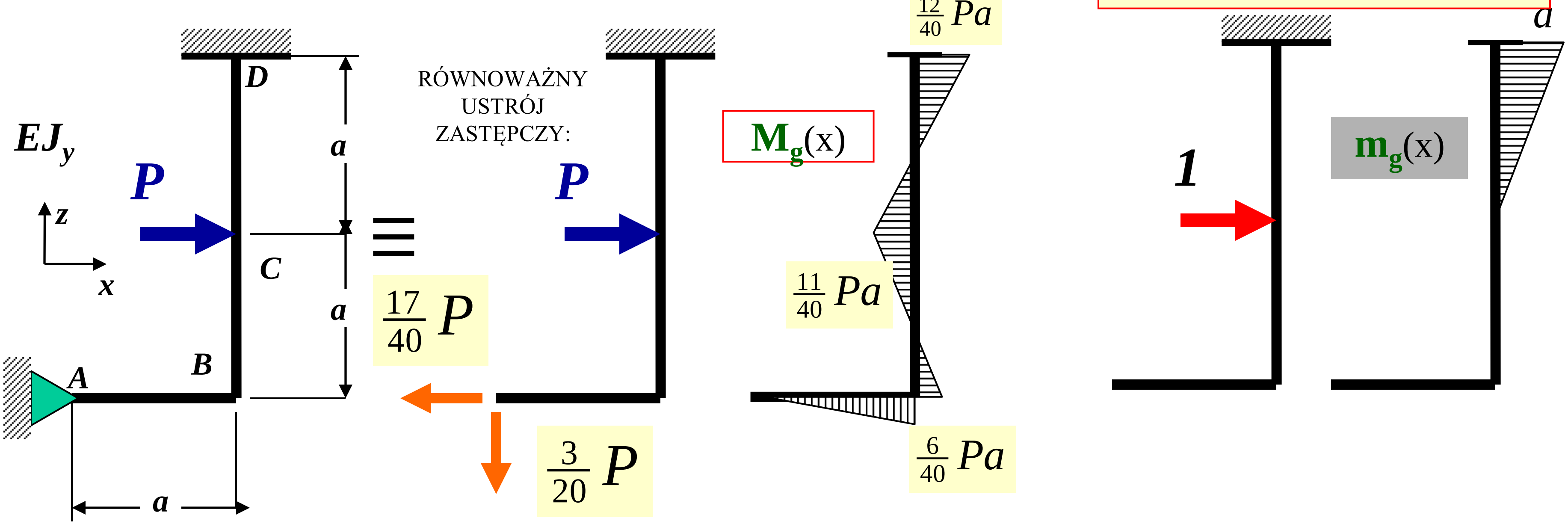
$$X_2 = -\frac{3}{20} P$$



Końcowy rozkład momentu gnącego:

Zad.3b. Znaleźć przemieszczenie poziome p.C

STAN JEDNOSTKOWY **MOŻEMY PRZYŁOŻYĆ DO USTROJU ZASTĘPCZEGO !!!**



t.W.

$$u_C \cong \int_l \frac{M_g \cdot m_g}{EJ_y} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left(\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{12}{40} Pa - \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{11}{40} Pa\right) = \boxed{\frac{13Pa^3}{240EJ_y}}$$